

## 創建建築物的 3D 虛擬模型

學習階段： 3

學習範疇： 度量、圖形與空間範疇

學習單位： 三角學  
探索與研究

目標： (i) 豐富學生在現實情境中應用三角學的經驗  
(ii) 提升學生在建模中認出和作出假設的能力  
(iii) 運用數學軟件創造建築物的虛擬 3D 模型

先備知識： 運用三角學解與平面圖形有關的應用題

教學資源： (i) 捲尺和數位量角器  
(ii) 配有 GeoGebra 或網路連線的桌上型電腦或平板電腦

### 跨學習領域的協作建議：

這一系列活動將使用數位量角器的行動應用程式。或者，教師可以考慮與科技教育教師合作，他們的課堂可以指導學生使用 App Inventor 或 micro:bit 等方式創建自己的數位量角器。

### 背景資料：

建築物高度的估算是數學在建築、工程和城市規劃領域的重要應用。從建築項目到城市發展規劃，準確的高度估算至關重要。以下建模活動的主要目的是豐富學生對相似平面圖形和三角比概念的理解和實際應用。

基於描述性的建模，這一系列活動引導學生透過測量收集數據，並創造現實世界中實物的虛擬 3D 模型。在資訊科技的幫助下，本資源套提供了測量的虛擬模擬。因此，這些活動也可以在課室環境中進行，不受天氣的影響。在一系列活動中，學生不僅體驗了估算建築物高度的過程，還參與了從假設到局限性，以至估算和建模方法的環境限制等各個方面的討論。

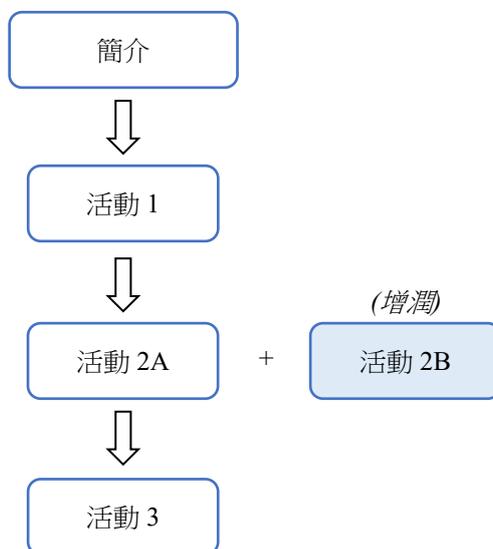
### 活動詳情：

這資源套件共有三個主要的活動：

- 活動 1：討論一個估算高度的數學模型。

- 活動 2：在量度水平距離可行（2A）或不完全可行（2B）的情況下，運用三角比估算高度。
- 活動 3：創造建築物的 3D 模型。

因應學生的能力和校情，教師可以考慮採用以下方法制定活動計劃：



根據 Yong 等人（2015）的數學建模過程框架，下表總結了教師可以在相應問題中與學生討論的元素。

階段	元素	工作紙 1	工作紙 2A	工作紙 2B	工作紙 3
定義	定義感興趣的問題	封面			
	確定變量和參數	2	3(b)	7(b)	
轉化	確定支配原則	2	1, 2, 3(b)	6, 7(b)	
	作出簡化假設	1(b), 3	3(a)	7(a)	4
	構建數學模型	2			3
分析	選擇合適的數學工具 & 解決數學問題	1(a), 2, 4	1-4	5-7	1, 2
	確定或估計參數	2	3(b)	7(b)	
	驗證解決方案				
解釋	視像化解決方案		3	7	3
	得出適當的結論 & 傳達結果	2	3	7	3

## 活動 1 (請參閱工作紙 1)

此活動的目的是通過討論一個可能的數學模型，建立對高度估算的背景。

### 教學建議：

1. 教師可以透過討論估算頒獎台的長度 (問題 1(a)) 和高度 (問題 1(b)) 的方法來引起學生的興趣。這種學習經驗將有助學生為後續活動做好準備。

問題 1(a) 提供了每個台階是相同長度的資料。因此，頒獎台的總長度可以通過乘法來求出。

建議答案：

$$\begin{aligned}GH \\ &= 60 \text{ cm} \times 3 \\ &= 180 \text{ cm}\end{aligned}$$

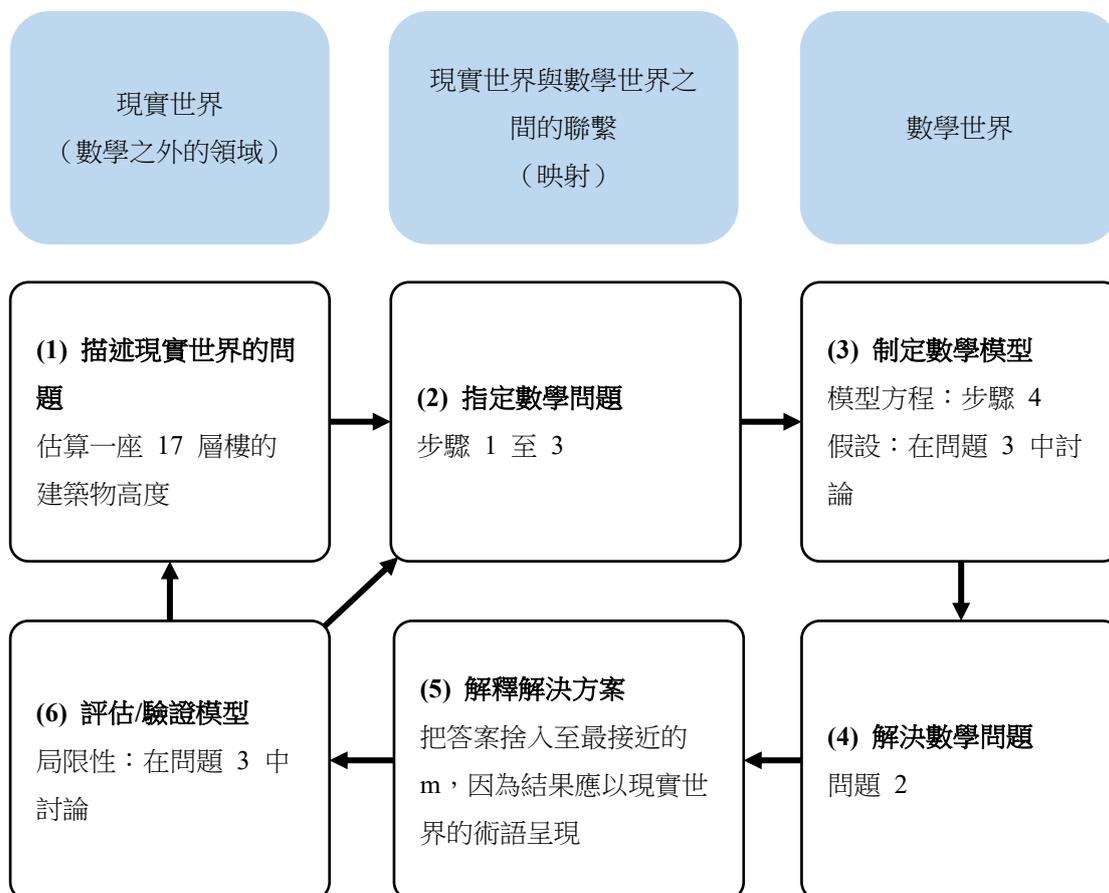
問題 1(b) 陳述一個把台階的高度乘以台階總數所得的估算。與問題 1(a) 不同，這裏未有指明每個台階的高度相等。因此，學生的任務是要識別在高度估算中的這個主要假設，並在小組中討論這個假設是否合理。以下是一些可能的討論結果。

- 學生假設每個台階的高度相等 (32 cm)。  
這個假設是合理的，因為它考慮到設計的一致性。在許多建築結構中，樓梯通常被設計成具有相同的梯級高度。這種設計的一致性有助於確保安全和使用的便利性，因為人們在上下樓梯時通常期望梯級的高度是一致的。

*[學生可能會主張該假設是不合理的。例如：*

*該假設是不合理的，因為在真實世界的情境中可能存在變化，原因包括特定設計、施工錯誤或長期磨損等因素。]*

2. 問題 2 提出了估算建築物高度的方法。教師可以使用數學建模框架（Galbraith & Holton，2018）向學生介紹這種方法，如下圖所示。



這個問題的重點是透過應用所提供的模型來解決數學問題。

建議答案：

$$\begin{aligned}
 & \text{建築物的高度} \\
 & = 15.2 \text{ cm} \times 16 \times 17 \\
 & = 4134.4 \text{ cm} \\
 & = 41 \text{ m}
 \end{aligned}$$

3. 教師應強調，這樣的計算之所以是可能的，是因為我們已經作出了一些假設。此外，模型方程存在一些局限性。因此，問題 3 的討論提升學生在進行假設和識別建模局限性方面的能力。以下是一些可能的討論結果。
- 假設：
    1. 梯級的高度 ( $h$ ) 相等
    2. 垂直的階梯
    3. 每層樓 ( $k$ ) 的梯級數目 ( $n$ ) 相同
  - 局限性：

這個模型忽略了延伸到樓梯區域之外的部分，例如屋頂或其他建築組件。
4. 在現實中，我們所計劃的方法並不一定可行，這是由於環境的限制，例如無法進入的區域和安全問題。透過問題 4 的討論，教師可以提高學生在 STEAM 活動中的守規和安全意識。以下是一些可能的討論結果。
1. 無法進入的區域：在某些情況下，建築物的某些部分可能是私人區域，無法進行數算和測量梯級。
  2. 安全問題：進入建築物的樓梯可能存在危險，尤其是在陌生或不安全的環境中。

## 活動 2A (請參閱工作紙 2)

此活動應用三角比來估算高度，且運用數位量角器來測量仰角。這科技的揉合突顯了它在解決現實世界問題和數學建模中的重要角色。

### 教學建議：

1. 教師可以回顧學生運用三角比來解與平面圖形有關的應用題的先備知識。問題 1 已提供了必要的資料和假設。

建議答案：

$$\begin{aligned}\tan 37.2^\circ &= \frac{BC}{5.63} \\ BC &= 5.63 \tan 37.2^\circ \\ &= 4.27 \text{ m}\end{aligned}$$

2. 與問題 1 相似，問題 2 旨在回顧學生的先備知識。但這問題較進深，因為它考慮了學生的視線高度。我們需要構作一條垂直於樹的直線。

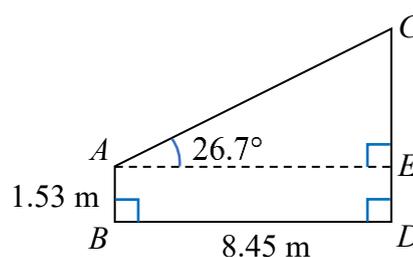
建議答案：

作線  $AE \perp CD$

$$AE = 8.45 \text{ m}$$

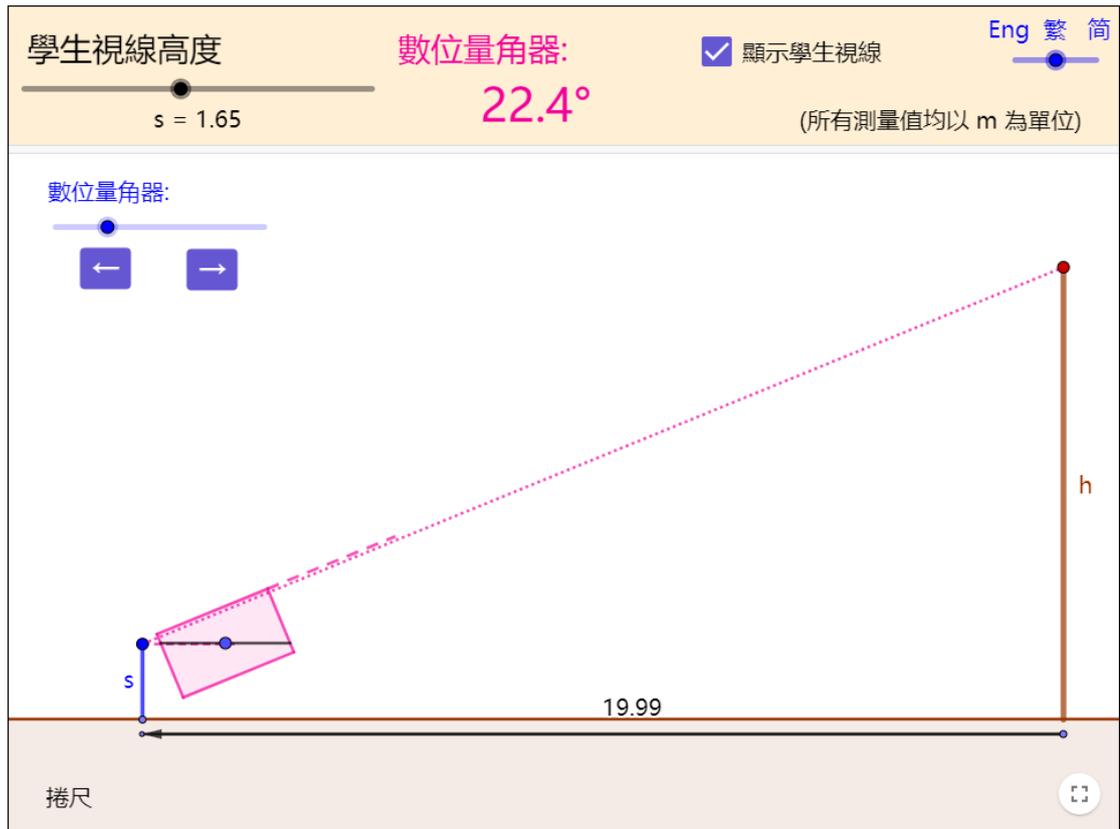
$$\begin{aligned}\tan 26.7^\circ &= \frac{CE}{8.45} \\ CE &= 8.45 \tan 26.7^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}CD &= CE + ED \\ &= 8.45 \tan 26.7^\circ + 1.53 \\ &= 5.78 \text{ m}\end{aligned}$$



3. 有了從問題 2 中得到的經驗，學生需要 (a) 作出必要的假設，然後 (b) 估算建築物的高度。這裏需要使用捲尺來量度學生視線高度和學生與建築物之間的水平距離，及數位量角器來測量仰角。

這個小程序 (<https://www.geogebra.org/m/y-men6puf>) 提供了測量的虛擬模擬，使這項活動能夠在課室環境中進行。教師還可以運用這個小程序來示範測量的過程。



一組可能的測量值如下：

- 仰角 =  $22.4^\circ$
- 學生視線高度  $s = 1.65 \text{ m}$
- 學生與建築物之間的水平距離 =  $19.99 \text{ m}$

建議答案：

(a) 假設：

1. 垂直建築：地面和建築物之間的角度確切為  $90^\circ$ 。
2. 地面狀態：地面平坦，沒有凹凸不平之處，因為這可能會影響測量學生與建築物之間的水平距離的準確性。
3. 地面水平：學生站立的位置和建築物的基座處於相同的水平。

(b) [基於上述的一組可能測量值]

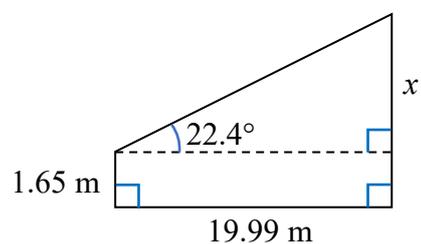
由學生的眼睛，作一條垂直於建築物的水平線。

設  $x$  為未知數，如圖所示。

$$\tan 22.4^\circ = \frac{x}{19.99}$$
$$CE = 19.99 \tan 22.4^\circ$$

$$h = x + 1.65$$
$$= 19.99 \tan 22.4^\circ + 1.65$$
$$= 9.89 \text{ m}$$

$\therefore$  建築物的高度是 9.89 m。



4. 在活動 2A 的尾聲，教師可以帶領學生討論在估算時可能遇到的環境限制。以下是一些可能的討論結果。
1. 天氣情況：惡劣的天氣情況（例如濃霧或下雨）可能會遮擋視線，影響測量角度的準確性。
  2. 障礙物：可能會有障礙物阻礙測量學生站立位置和建築物基座之間的距離。

## 活動 2B (請參閱工作紙 2)

此增潤活動擴展三角比在高度估算中的應用，特別是在量度水平距離不完全可行的情況下。

### 教學建議：

5. 教師可以利用例子 5 為學生講解這種方法，其中量度  $CD$  的長度並不可行。
  - 步驟 1：測量地面上兩點（即  $A$  和  $D$ ）之間的距離。請注意，這兩點和建築物的基座應該成一條直線（即  $A$ 、 $D$  和  $C$  共線）。
  - 步驟 2：測量從這些點到建築物頂部的仰角（即  $\angle BAC$  和  $\angle BDC$ ）。
  - 步驟 3：以解聯立二元一次方程的知識解決數學問題。
6. 學生應用所學來完成即時練習 6。教師可以從而檢視他們對這個方法的理解，並相應地提供反饋。

### 建議答案：

設  $BC = h$  m 和  $DC = x$  m。

在  $\triangle BCD$ ，

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{x}$$
$$x = \frac{h}{\tan 60^\circ} \quad \dots\dots(1)$$

在  $\triangle ABC$ ，

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{x+9}$$
$$x+9 = \frac{h}{\tan 30^\circ} \quad \dots\dots(2)$$

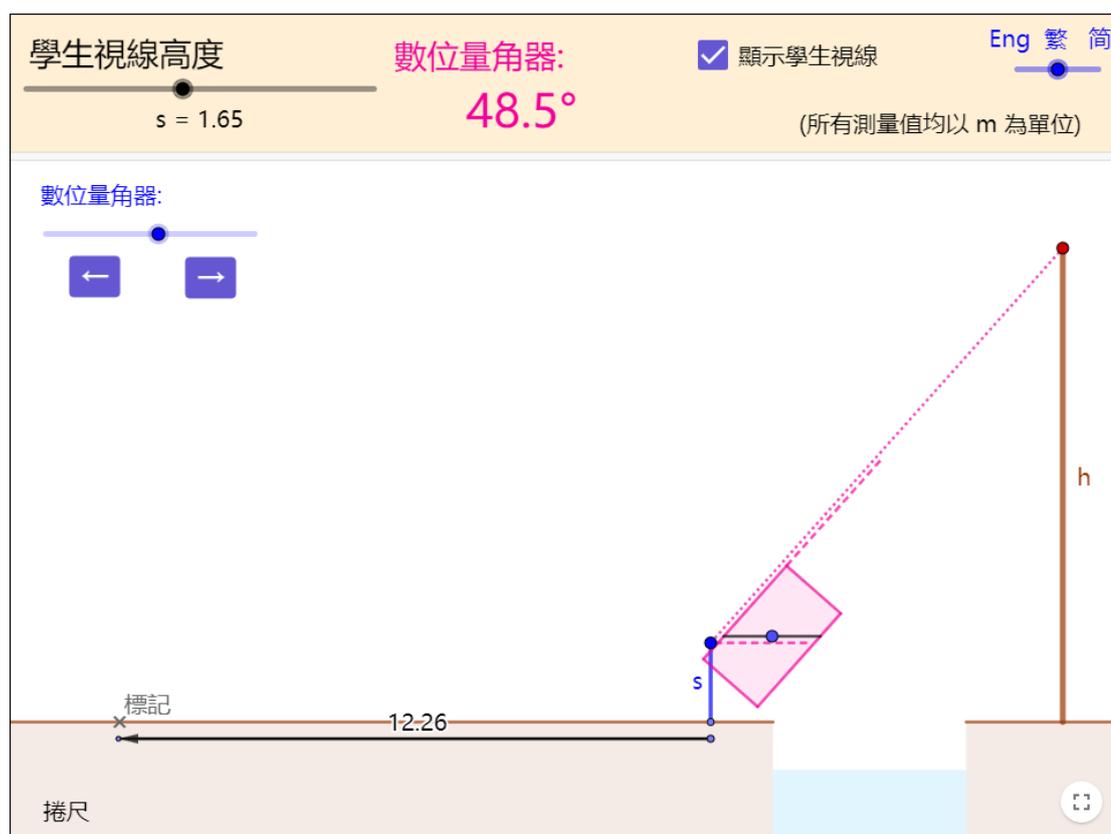
把 (1) 代入 (2)，可得：

$$\frac{h}{\tan 60^\circ} + 9 = \frac{h}{\tan 30^\circ}$$
$$9 = \frac{h}{\tan 30^\circ} - \frac{h}{\tan 60^\circ}$$
$$9 = h\left(\frac{1}{\tan 30^\circ} - \frac{1}{\tan 60^\circ}\right)$$
$$9 \div \left(\frac{1}{\tan 30^\circ} - \frac{1}{\tan 60^\circ}\right) = h$$
$$h = 7.79$$

$\therefore BC = 7.79$  m

7. 有了從即時練習 6 中得到的經驗，學生需要 (a) 作出必要的假設，然後 (b) 估算建築物的高度。這裏需要使用捲尺來量度學生視線高度和第一與第二個位置之間的水平距離，及數位量角器來測量仰角。

這個小程序（<https://www.geogebra.org/m/djurma4f>）提供了測量的虛擬模擬，使這項活動能夠在課室環境中進行。教師還可以運用這個小程序來示範測量的過程。



一組可能的測量值如下：

- 第一個仰角 =  $22.8^\circ$
- 第二個仰角 =  $48.5^\circ$
- 學生的視線高度  $s = 1.65 \text{ m}$
- 第一與第二個位置之間的水平距離 =  $12.26 \text{ m}$

建議答案：

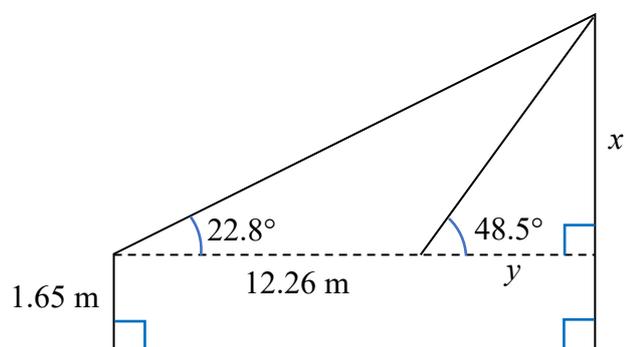
(a) 假設：

地面水平：學生站立的兩個位置和建築物的基座處於相同的水平位置且共線。

(b) [基於上述的一組可能測量值]

由學生的眼睛，作一條垂直於建築物的水平線。

設  $x$  和  $y$  為未知數，如圖所示。



$$\tan 48.5^\circ = \frac{x}{y}$$

$$y = \frac{x}{\tan 48.5^\circ} \dots\dots(1)$$

$$\tan 22.8^\circ = \frac{x}{y+12.26}$$

$$y+12.26 = \frac{x}{\tan 22.8^\circ} \dots\dots(2)$$

把 (1) 代入 (2)，可得

$$\frac{x}{\tan 48.5^\circ} + 12.26 = \frac{x}{\tan 22.8^\circ}$$

$$12.26 = \frac{x}{\tan 22.8^\circ} - \frac{x}{\tan 48.5^\circ}$$

$$12.26 = x\left(\frac{1}{\tan 22.8^\circ} - \frac{1}{\tan 48.5^\circ}\right)$$

$$12.26 \div \left(\frac{1}{\tan 22.8^\circ} - \frac{1}{\tan 48.5^\circ}\right) = x$$

$$x = 8.205165382$$

$$h = 8.205165382 + 1.65$$

$$= 9.86$$

∴ 建築物的高度是 9.86 m。

### 活動 3 (請參閱工作紙 3)

在這個活動中，學生將運用 GeoGebra 創造一個建築物的虛擬 3D 模型。教師可以在課堂內進行此活動，或將其指派為課後任務。

#### **教學建議：**

1. 學生運用線上地圖找出建築物的橫向尺寸。教師可以建議他們截取並下載目標建築物的地圖，並包含比例尺。有了這個比例尺，在創建 3D 模型時便能更容易保持正確的比例。
2. <https://www.geogebra.org/classic> 是 GeoGebra 的線上應用程式。教師和學生也可以在電腦上安裝 GeoGebra。  
請到：<https://www.geogebra.org/download>
3. 教師可以向學生介紹使用 GeoGebra 創造 3D 模型的資訊科技技巧。教師可以使用工作紙 3 中的步驟，當中以一座高 96 m 的建築物為示例。
4. 在活動的尾聲，教師可以帶領學生討論他們對這個 3D 模型所作出的假設。以下是一些可能的討論結果。
  1. 建築物形狀：建築物是一個角柱體，在整個高度上具有均勻橫切面。
  2. 建築物頂部：建築物的屋頂或最頂層是完全平坦的。

### 總結：

整體而言，學生接觸了兩種不同的高度估算方法，進而創建他們的 3D 虛擬模型。他們還探討了每種方法當中的假設、局限性和環境限制。

在結束這項活動時，教師可以總結和比較這兩種方法。

- 活動 1：透過測量單個台階的高度和總數來估算建築物高度是直接的，但可能會受到情境限制，例如無法進入建築物內部。
- 活動 2：透過仰角和水平距離來估算高度，我們不需進入建築物內部，但需要其他工具（例如數位量角器）來測量角度。

我們也有其他方法。例如，利用影子長度和相似三角形，我們可以在不進入建築物內部和不需要數位量角器的情況下估算它的高度，但可能會遇到與天氣條件相關的環境限制（例如：下雨或多雲陽光不足的日子，將不可能測量影子的長度）。因此，我們應根據實際的情況和可動用的資源來選擇適當的估算和建模方法。

### 參考文獻：

- Galbraith, P., & Holton, D. (2018). *Mathematical modelling: A guidebook for teachers and teams*. Australia: Australian Council for Educational Research.
- Yong, D., Levy, R., & Lape, N. (2015). Why no difference? A controlled flipped classroom study for an introductory differential equations course. *PRIMUS*, 25(9–10), 907–921.

## 建議的教案和教學流程

教學時間：70 分鐘或雙課節

時間 (分鐘)	教學目的	教學活動和流程	資源/ 備註
20	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 引起學生興趣</li> <li>• 建立對高度估算的背景</li> <li>• 提升學生識別假設的能力</li> <li>• 應用建模結果</li> <li>• 提升學生在建模中認出假設、局限性和環境限制的能力</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教師透過討論現實情境來引起學生的興趣。</li> <li>2. 教師透過討論估算頒獎台的長度和高度的方法來引起學生的興趣。</li> <li>3. 教師指出問題 1(a) 和問題 1(b) 的不同之處，由此強調在現實世界問題中作出假設的需要。</li> <li>4. 學生分組討論所作出了的主要假設和判斷它是否合理。</li> <li>5. 利用問題 2 中的方法，教師向學生介紹數學建模框架。</li> <li>6. 學生應用所提供的模型來解決問題。</li> <li>7. 學生分組討論在模型中的假設和局限性。</li> <li>8. 學生分組討論模型方法的環境限制。</li> </ol>	<p>WS 封面</p> <p>WS1 Q1</p> <p>WS1 Q2</p> <p>WS1 Q3–4</p>
20	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 回顧先備知識</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教師利用例子作為熱身練習，讓學生回顧運用三角比來解與平面圖形有關的應用題的知識。</li> </ol>	WS2A Q1–2

時間 (分鐘)	教學目的	教學活動和流程	資源/ 備註
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 使用三角比來估算高度</li> <li>• 提升學生作出假設的能力</li> <li>• 提升學生在建模中認出環境限制的能力</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>2. 教師可以運用小程式來示範測量的過程。</li> <li>3. 學生分組討論在估算中的必要假設。</li> <li>4. 學生使用捲尺量度一位學生的視線高度、他與建築物之間的水平距離。他們並使用數位量角器測量從他的眼睛到建築物頂部的仰角。</li> <li>5. 學生基於他們的測量值來估算建築物的高度。</li> <li>6. 學生分組討論在估算時可能遇到的環境限制。</li> </ol>	<p>WS2A Q3</p> <p>WS2A Q4</p>
[20]*	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 使用三角比來估算高度（進深）</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教師利用例子和即時練習，介紹當量度水平距離不完全可行時，如何使用三角比來估算高度。</li> <li>2. 教師可以運用小程式來示範測量的過程。</li> <li>3. 學生分組討論在估算中的必要假設。</li> <li>4. 學生使用捲尺量度一位學生的視線高度、他第一與第二個位置之間的水平距離。他們並使用數位量角器測量從他的眼睛到建築物頂部的第一和第二個仰角。</li> <li>5. 學生基於他們的測量值來估算建築物的高度。</li> </ol>	<p>WS2B Q5–6</p> <p>WS2B Q7</p>
25	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 創建 3D 虛擬模型</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 學生運用 GeoGebra 來創建建築物的虛擬 3D 模型。</li> <li>2. 學生分組討論在模型中所牽涉的假設。</li> </ol>	<p>WS3 Q1–3</p> <p>WS3 Q4</p>

時間 (分鐘)	教學目的	教學活動和流程	資源/ 備註
5	<ul style="list-style-type: none"> <li>總結活動</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>教師總結和比較以上兩個高度估算的方法。</li> <li>教師強調每個方法的優點和局限性。</li> </ol>	

\* 因應學生的能力和校情，活動 2A 和活動 2B 可以二擇其一。